TITLE:

On Cartan matrices with two parameters (Research on finite groups and their representations, vertex operator algebras, and algebraic combinatorics)

AUTHOR(S):

清田, 正夫

CITATION:

清田, 正夫. On Cartan matrices with two parameters (Research on finite groups and their representations, vertex operator algebras, and algebraic combinatorics). 数理解析研究所講究録 2014, 1926: 49-52: KJ00009589859.

ISSUE DATE:

2014-12

URL:

http://hdl.handle.net/2433/223507

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第1926巻 2014年 49-52

On Cartan matrices with two parameters

東京医科歯科大学教養部　清田正夫

Tokyo Medical and Dental University, College of Liberal Arts and Sciences
Masao KIYOTA

1 序文

本文の内容は千葉大学の越谷重夫氏との共同研究の結果である。また、2001 年の数理研講演 [K] の続編でもある。

G を有限群、F を標数 $p>0$ の代数閉体とする。群環 FG は直既約な両側イデアル B_i 達の直和に分解され、各 B_i は FG のブロックと呼ばれている。B を FG のブロックとする。$S_1, \cdots, S_l$ $(l=l(B))$ を B に属す単純 FG 加群とし、P_i を S_i の射影被覆とする。整数 $c_{ij}=\dim_F \mathrm{Hom}_{FG}(P_i, P_j)$ をカルタン不変数と呼び、$l\times l$ 行列 $C=(c_{ij})$ をブロック B のカルタン行列という。

以下、カルタン行列 $C=(c_{ij})$ を特別な形に決めたとき、群 G や ブロック B の構造についてどんなことがいえるかを調べる。ブロック B の構造として、ここでは次の不変量を考える。

- $l(B)$: B に属す単純 FG 加群の個数。
- $k(B)$: B に属す通常既約指標の個数。
- $|D|$: B の不足群 D の位数。
- カルタン行列 C の単因子。
- カルタン行列 C の固有値。

カルタン行列 C の単因子や固有値については次の事実が知られている。

事実 1　C の行列式 $\det C$ は p べきである。

事実 2　C の最大の単因子は $|D|$ と一致していて、他の単因子はすべて $|D|$ より小さい。

事実 3　G の p' 共役類の代表元の内から $l(B)$ 個の元 x_i をうまく選ぶと
$\{|C_G(x_i)|_p \mid i=1,\cdots,l(B)\}$ が C の単因子全体と一致する。

事実 4　C の固有値はいずれも正の実数で、その最大固有値は単根である。これを C の Frobenius 固有値と呼び、$\rho(C)$ で表す。

ここだけの記号であるが、$n(B) = |\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq l(B)\}|$ とおく。つまり、 $n(B)$ は異なるカルタン不変数の個数を表す。 カルタン行列は正則なので、$n(B) = 1$ と $l(B) = 1$ は同値となる。以下、$n(B) = 2$ となるブロック B の構造を考察する。§2では、$n(B) = 2$ となるブロック B のカルタン行列 C が2とおりに決まること、および、C が一意的に決まるのではないかという予想とその証拠を述べる。§3では、p 可解群 G の主ブロック B_0 が $n(B_0) = 2$ を満たすための条件を群構造の言葉で記述する。

2 補題

以下、序文の記号をそのまま用いる。すなわち、B を有限群 G の p ブロックとし、D, C をそれぞれ B の不足群、カルタン行列とする。また、 $n(B)$ で B の異なるカルタン不変数の個数を表す。カルタン行列を記述するため、2つの l 次正方行列 $C(a,b), C'(a,b)$ を定義する。正整数 a, b について、対角成分がすべて a でそれ以外の成分が b となる l 次正方行列を $C(a,b)$ とし、$C(a,b)$ の (l,l) 成分 a を b に置き換えた行列を $C'(a,b)$ とする。例えば、$l = 4$ のとき、

$$C(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad C'(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

となる。これらの記号のもとで、

補題 1　$n(B) = 2$ で $\{c_{ij} \mid 1 \leq i,\ j \leq l\} = \{a,\ b\},\ a > b$ のとき、$C = C(a,b)$ または $C = C'(a,b)$ となる。

補題 1 の証明には不等式 $c_{ij}^2 < c_{ii}c_{jj}, (i \neq j)$ を用いる。

p 可解群 G の巡回ブロック B（不足群 D が巡回群となるブロック）は $C(a,b)$ の形のカルタン行列を持つブロックの典型例のひとつである。実際このとき $C = C(m+1, m)$ となることが知られている。ここで m は等式

$$ml = |D| - 1$$

を満たす整数で、巡回ブロック B の重複度と呼ばれている。

一方、$C = C'(a,b)$ となるブロック B の例は（少なくとも私には）見当たらない。実際、p 可解群 G の場合や、D が正規部分群の場合には、$C = C'(a,b)$ は起こらない。

補題 2　G が p 可解群であるか、または、D が G の正規部分群であるとする。このとき、$n(B) = 2$ ならば、$C = C(a,b)$ となる。

上でみたように、巡回ブロックでは、$C = C(a,b)$ で $a = m+1, b = m$ となっている。とくに a, b は互いに素である。実は、a, b が互いに素である場合も $C = C(a,b)$ となる。

補題 3　補題 1 の仮定と記号のもとで、$(a,b) = 1$ ならば、$C = C(a,b)$ となる。

補題 2, 3 から次が予想される。

予想 4　$n(B) = 2$ のとき、$C = C(a,b)$ となるか？

$C = C(a,b)$ となるブロック B の構造については [K] に詳しく述べてある。

3　主定理

以上の準備のもとで、p 可解群 G の主ブロック B_0 が条件 $n(B_0) = 2$ を満たすとき、G の構造を決定する。

主定理　G を p 可解群、B_0 を G の主ブロックとする。C を B_0 のカルタン行列とする。このとき、次は同値である。

(1) $n(B_0) = 2$
(2) $l(B_0) \geq 2$ かつ正整数 a, b がとれて $C = C(a,b)$ となる。
(3) 次の (i) および (ii) が成り立つ。
  (i) $G/O_{p',p}(G)$ は位数が 2 以上の可換群。
  (ii) $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$ とおく。x, y が $\bar{G}$ の非自明な p' 元ならば、$|C_{\bar{G}}(x)| = |C_{\bar{G}}(y)|$ となる。

略証　補題 2 から (1) と (2) の同値性はすぐわかる。
(2) を仮定する。[K] 命題 4 より、$\rho(C) = |D|$ となる。一方、C の形から ${}^t(1,\cdots,1)$ が

$\rho(C) = |D|$ の固有ベクトルとなる。[K-M-W] Theorem 1 より、B_0 の単純 FG 加群 S_i はすべて次元 1 となる。ゆえに $G' \leq \mathrm{Ker}S_i$. Brauer の定理より $\bigcap \mathrm{Ker}S_i = O_{p',p}(G)$. これから (3, i) が出る。 C の単因子は $\{a-b, \cdots, a-b, |D|\}$ なので序文の事実 3 から (3, ii) が導ける。これで (2) から (3) が証明された。

(3) から (2) を導くには、公式 $c_{ij} = (\Phi_i, \Phi_j)$ を用いて指標の計算を実行する。ここで Φ_i は射影被覆 P_i の指標を表す。計算の詳細は省略する。

最後に定理の条件 (3 i) だけでは $C = C(a, b)$ が導けないことを例示する。$p = 3$, $G = S_3 \times S_3$ は (3, i) を満たすが、$B_0(FG) = FG$ のカルタン行列 C は

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となり、定理の条件 (2) が成り立たない。

参考文献

[K] 清田正夫、2 つのパラメーターを持つカルタン行列について、数理解析研究所講究録 1251, 42-45, 有限群のコホモロジー論の研究 (2002)

[K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. of Algebra 249,110-119 (2002)